

UN PROBLÈME DE 1914

TI-Nspire™ CAS

Objectifs

Utiliser tableur et calcul formel pour résoudre un problème d'arithmétique.

« Le produit de quatre entiers consécutifs, augmenté de 1, est un carré parfait. »

Cette phrase constitue l'énoncé n° 647 des « Exercices d'arithmétique » de J. Fitz Patrick, 1914.

Le but de l'exercice est de vérifier, sur des exemples, la validité de la propriété, d'émettre des conjectures pour démontrer cette propriété.

Énoncé

1) Expérimentation

a) A l'aide du tableur, afficher tous les entiers de 0 à 200 ; on notera n cet entier.

Faire le produit de cet entier par les trois entiers suivants et ajouter 1 à ce produit ; on appellera $f(n)$ le résultat obtenu.

Prendre alors la racine carrée de $f(n)$ que l'on notera $r(n)$.

b) Que remarque-t-on au sujet de la nature des nombres $r(n)$?

c) Tracer le graphique de la fonction $n \mapsto r(n)$, en insérant une page de **Données & statistiques**.

A quelle courbe ressemble le graphique obtenu ?

d) Conjecturer la formule donnant $r(n)$ en fonction de n . On pourra utiliser la fonction régression sur la fenêtre **Données & statistiques** sachant que la régression semble être une fonction polynomiale de degré 2.

2) Démonstration

a) En utilisant les premières valeurs de n et de $r(n)$, à partir de la conjecture faite dans l'expérimentation, déterminer l'expression de $r(n)$ en fonction de n .

b) Vérifier que cette formule donne les mêmes résultats que les calculs déjà effectués pour n entre 0 et 200.

Est-ce que c'est suffisant pour affirmer que cette égalité est exacte pour tout entier naturel n ?

c) Démontrer le résultat pour tout n entier naturel.