UN PROBLÈME DE 1914

TI-Nspire™ CAS

Mots-clés : suite, régression, polynôme du second degré.

Fichier associé: 1914.tns

1. Objectifs

Utiliser tableur et calcul formel pour résoudre un problème d'arithmétique.
« Le produit de quatre entiers consécutifs, augmenté de 1, est un carré parfait. »
Cette phrase constitue l'énoncé n° 647 des « Exercices d'arithmétique » de J. Fitz Patrick, 1914.
Le but de l'exercice est de vérifier, sur des exemples, la validité de la propriété, d'émettre des conjectures pour démontrer cette propriété.

2. Enoncé

1) Expérimentation
a) A l'aide du tableur, afficher tous les entiers de 0 à 200 ; on notera *n* cet entier.
Faire le produit de cet entier par les trois entiers suivants et ajouter 1 à ce produit ; on appellera $f(n)$ le résultat obtenu.
Prendre alors la racine carrée de $f(n)$ que l'on notera $r(n)$.
b) Que remarque-t-on au sujet de la nature des nombres $r(n)$?
c) Tracer le graphique de la fonction $n \mapsto r(n)$, en insérant une page de **Données & statistiques**.
A quelle courbe ressemble le graphique obtenu ?
d) Conjecturer la formule donnant $r(n)$ en fonction de *n*. On pourra utiliser la fonction régression sur la fenêtre **Données & statistiques** sachant que la régression semble être une fonction polynomiale de degré 2.

2) Démonstration
a) En utilisant les premières valeurs de *n* et de $r(n)$, à partir de la conjecture faite dans l'expérimentation, déterminer l'expression de $r(n)$ en fonction de *n*.
b) Vérifier que cette formule donne les mêmes résultats que les calculs déjà effectués pour *n* entre 0 et 200.
Est-ce que c'est suffisant pour affirmer que cette égalité est exacte pour tout entier naturel *n* ?
c) Démontrer le résultat pour tout *n* entier naturel.

3. Commentaires

L'utilisation du tableur et du calcul formel de la TI-Nspire permet de formuler des conjectures qu'on pourra valider très rapidement.

4. Conduite de l'activité

1) Expérimentation

a) Dans la colonne A, on crée une suite de nombres *n* de 0 à 200 à l'aide de la fonction :=seq(*x*,*x*,0,200,1). Ce qui permet d'avoir l'affichage de tous les entiers de 0 à 200.
La colonne B va permettre de calculer le produit d'un entier *n* par les trois entiers qui le suivent auquel on ajoute 1.

© Texas Instruments 2010 / Photocopie autorisée

Dans la cellule B1, écrire : =A1*A2*A3*A4+1 puis valider.
Par un copier-coller vers le bas (**3. Données**, **3. Saisie rapide**), on obtient donc l'ensemble des résultats de ces opérations.

On remarque que dans les 3 dernières lignes de la colonne B, apparaît un tiret – ; en effet, la formule employée à la ligne 199 fait intervenir le contenu de la cellule 201, cellule vide. Il en est de même pour les lignes 200 et 201 (qui appellent les contenus des cellules 202, 203 et 204.

	A n	B f	C r	D	E	F	G
◆	=seq(x,x,0,200,1)						
1	0	=a1·a2·a3·a4	1				
2	1	25	5				
3	2	121	11				
4	3	361	19				
5	4	841	29				
6	5	1681	41				
7	6	3025	55				
8	7	5041	71				
9	8	7921	89				
10	9	11881	109				
11	10	17161	131				
12	11	24025	155				
13	12	32761	181				
14	13	43681	209				
B1	=a1·a2·a3·a4+1						

Dans la colonne C, on affiche la racine carrée du résultat de la colonne B :

en C1, écrire = $\sqrt{\text{B1}}$ et, de la même façon, par copier-coller vers le bas, on obtient $r(n) = \sqrt{f(n)}$.

	A n	B f	C r	D	E	F	G
◆	=seq(x,x,0,200,1)						
1	0	1	=√b1				
2	1	25	5				
3	2	121	11				
4	3	361	19				
5	4	841	29				
6	5	1681	41				
7	6	3025	55				
8	7	5041	71				
9	8	7921	89				
10	9	11881	109				
11	10	17161	131				
12	11	24025	155				
13	12	32761	181				
14	13	43681	209				
C1	=√b1						

b) En observant les nombres de la colonne C, il semble que, pour tout nombre n compris entre 0 et 200, $r(n) \in \mathbb{N}$.

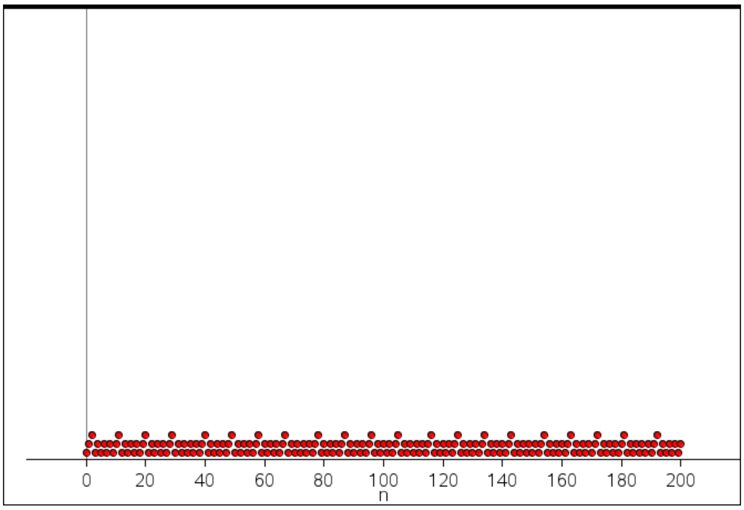
c) et **d)** Observation graphique de l'appartenance des nombres $r(n)$.

L'ouverture d'une page **Données & statistiques** donne un nuage de points désordonné.

En bas de l'écran, en cliquant sur : « Cliquer pour ajouter une variable », on fait apparaître toutes les variables.

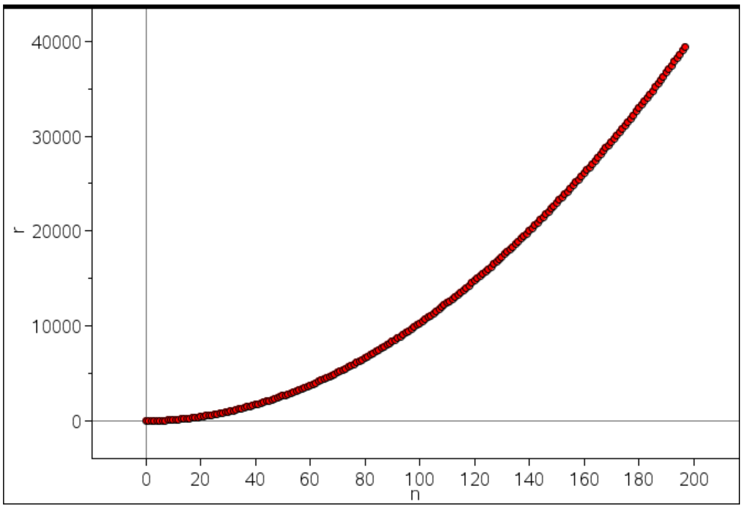
On définit alors quels sont les nombres en abscisses (en l'occurrence, **n**).

On obtient l'écran ci-contre.



On définit de même, en cliquant à gauche de l'écran quels sont les nombres en ordonnées (ici, **r**).

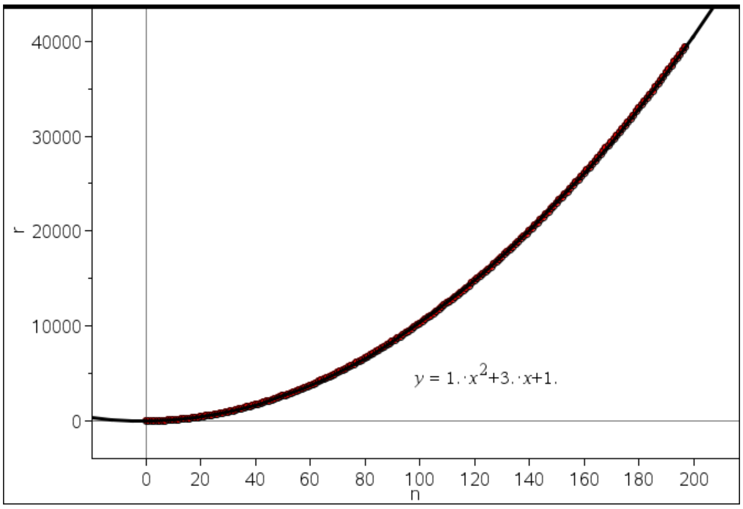
On obtient l'écran ci-contre.



On peut conjecturer que les points sont situés sur une parabole, donc on utilisera une régression polynomiale d'ordre 2 pour obtenir une équation de la courbe.

Pour effectuer la régression : cliquer sur **4. Analyse**, **6. Régression**, **4.Afficher degré 2**.

La parabole se trace et on obtient également l'équation : il semble que les points sont sur la parabole d'équation $y = n^2 + 3n + 1$.



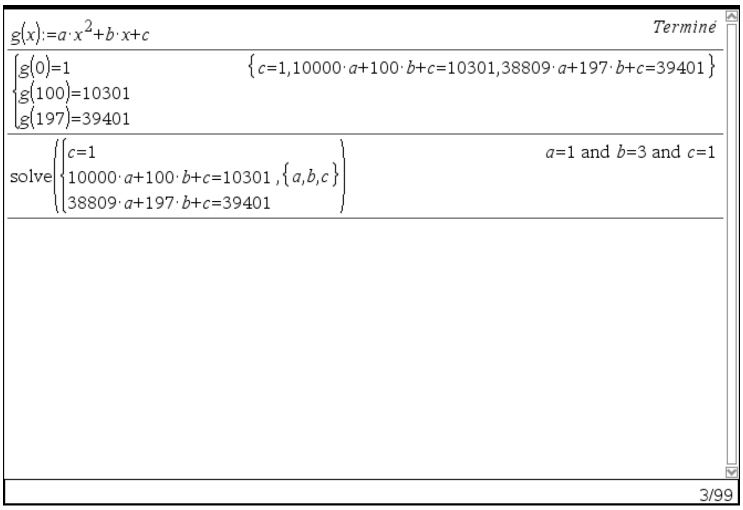
2. Démonstration

a) On va maintenant démontrer les résultats conjecturés dans la partie Expérimentation grâce au calcul formel qui va nous permette de gagner du temps sur l'ensemble des calculs.

On a conjecturé que les points se trouvaient sur une courbe d'équation $y = ax^2 + bx + c$; on se propose de déterminer a, b et c.

Dans une page de calculs, on stocke a*x^2 + b*x + c dans une fonction notée $g(x)$ (1re ligne).
On définit un système de trois équations à trois inconnues a, b et c grâce à trois valeurs prises de façon aléatoire dans le tableau (relativement espacées, 2e ligne).

Résolution du système : on clique sur **3. Algèbre**, **6. Résoudre un système d'équations**, qui nous propose par défaut un système d'ordre 2, que l'on transforme en système d'ordre 3, avec pour inconnues a, b et c.



Par copier-coller, on peut récupérer les équations au-dessus, et lancer la résolution.
On retrouve alors la solution $a = 1$, $b = 3$ et $c = 1$.

b) On se propose maintenant de démontrer, pour toute valeur de n, le résultat conjecturé précédemment.
La variable n ayant été affectée précédemment, nous devons soit ouvrir une nouvelle **Activité**, dans ce cas aucune variable ne sera affectée, soit changer le nom de la variable, ce que nous ferons ci-dessous.

On développe le produit de 4 entiers consécutifs et on ajoute 1 à ce produit.
$p(n) = n\times(n+1)\times(n+2)\times(n+3)+1$.

Après calcul, on obtient le polynôme de degré 4 suivant : $p(n) = n^4+6n^3+11n^2+6n+1$.

Le polynôme précédent peut s'écrire sous la forme : $p(n) = n^4+6\times n^3+9n^2+2n^2+6n+1$,

soit $p(n) = (n^2)^2+2\times(3n)\times n^2+(3n)^2+2\times n^2\times 1+1^2$.

Ce qui est le développement de $p(n) = (n^2+3n+1)^2$, pour tout n de $\mathbb{N}$.

Le calcul précédent peut être réalisé rapidement avec le logiciel de calcul formel :
ouvrir une page **Calculs** et opérer comme suit.

$\text{expand}(x\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+3)+1)$	$x^4+6\cdot x^3+11\cdot x^2+6\cdot x+1$
$\text{factor}(x^4+6\cdot x^3+11\cdot x^2+6\cdot x+1)$	$(x^2+3\cdot x+1)^2$

On peut alors écrire que $f(n) = (n^2+3n+1)^2$, on va donc pouvoir extraire la racine carrée, notée r, après avoir étudié le signe de (n^2+3n+1).

A l'aide de la calculatrice, et du calcul formel, on détermine directement le signe du polynôme (n^2+3n+1) :

On obtient $n^2+3n+1>0 \Leftrightarrow n > \dfrac{\sqrt{5}-3}{2}$ ou $n < \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

$\text{solve}(x^2+3\cdot x+1>0,x)$	$x<\dfrac{-(\sqrt{5}+3)}{2}$ or $x>\dfrac{\sqrt{5}-3}{2}$
$\dfrac{\sqrt{5}-3}{2}$	$\dfrac{\sqrt{5}-3}{2}$
$\dfrac{\sqrt{5}-3}{2}$ ▸Decimal	-0.381966

Or une valeur approchée de $\dfrac{\sqrt{5}-3}{2}$ est –0,38 et on travaille avec n entier ; alors, on peut affirmer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $n^2+3n+1>0$. Par conséquent, $r(n) = \sqrt{(n^2+3n+1)^2} = |n^2+3n+1| = n^2+3n+1$.

On peut vérifier, dans le tableur, que la formule trouvée est bien celle qui donne le produit de 4 entiers consécutifs auquel on ajoute 1.

	A n	B f	C r	D v	E	F	G
♦	=seq(x,x,0,200,1)						
1	0	1	1	1			
2	1	25	5	5			
3	2	121	11	11			
4	3	361	19	19			
5	4	841	29	29			
6	5	1681	41	41			
7	6	3025	55	55			
8	7	5041	71	71			
9	8	7921	89	89			
10	9	11881	109	109			
11	10	17161	131	131			
12	11	24025	155	155			
13	12	32761	181	181			
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]			

D1 $=a1^2+3\cdot a1+1$